

◁ **Artículo: Funciones de Bessel** ▷
Por Sebastián Soto Rojas (spsoto@uc.cl)

Índice

1. Introducción	3
1.1. Una motivación: la simetría cilíndrica	3
1.2. Resolución mediante series de potencias	5
2. Propiedades de las funciones de Bessel	8
2.1. Función generatriz	8
2.2. Valores especiales	13
2.3. Representación integral	14
3. Transformadas integrales	15
3.1. Transformada de Laplace	15
4. Aplicaciones	17
4.1. Modulación FM	17

Prólogo

En diversos problemas se genera una ecuación diferencial cuya solución son las conocidas funciones de Bessel. Ejemplos de estos problemas consideran guías de onda, modulación FM, conducción de calor en cilindros, propagación de onda en tambores, descripción del movimiento de la Luna, fibras ópticas y en general cualquier problema diferencial con simetría cilíndrica.

Este apunte surge como una breve reseña de las funciones de Bessel, debido a que en el departamento de Ingeniería Eléctrica estas son solo tratadas superficialmente con pocas alusiones a ellas. El artículo busca cubrir este vacío para introducir a los lectores interesados a este interesante grupo de funciones.

1. Introducción

1.1. Una motivación: la simetría cilíndrica

Una de las principales motivaciones para la aparición de las funciones de Bessel –si bien no es la histórica– consiste en la resolución de problemas diferenciales con simetría cilíndrica. A modo de ejemplo, supongamos que deseamos resolver la ecuación de onda en un tambor cilíndrico, de modo que tenemos la ecuación diferencial parcial:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \varphi \quad (1.1)$$

donde c es la velocidad de propagación en el medio. Dado que podemos asumir la existencia de una simetría cilíndrica pues las condiciones de contorno lo serán, entonces

$$\varphi = \varphi(\rho, \theta, z)$$

y por lo tanto la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

En diversas fuentes bibliográficas se puede demostrar que esta ecuación diferencial parcial tiene solución. Bajo este supuesto, asumamos que la solución puede escribirse como:

$$\varphi(\rho, \theta, z) = R(\rho) \Phi(\theta) Z(z) T(t)$$

Este método se conoce como método de separación habituales y es una técnica habitual para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales. Reemplazando en la ecuación diferencial parcial:

$$R'' \Phi Z T + \frac{1}{\rho} R' \Phi Z T + \frac{1}{\rho^2} R \Phi'' Z T + R \Phi Z'' T = \frac{1}{c^2} R \Phi Z T''$$

En otras palabras,

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \left(R'' + \frac{1}{\rho} R' \right) \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} \quad (1.2)$$

Resolveremos ahora etapa por etapa.

Dependencia en el tiempo. Observe que en la ecuación anterior solamente el lado izquierdo de la ecuación depende del tiempo, y el lado izquierdo depende de las variables ρ , θ y z . Por lo tanto, desde el punto de vista de t el lado derecho es una constante que denominaremos $-k^2$, obteniendo así la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -k^2 \longrightarrow T'' + (kc)^2 T = 0$$

Esta ecuación diferencial ordinaria tiene solución inmediata:

$$T_k(t) = T_{0\pm} e^{\pm jkct}$$

En este caso lo más sencillo es asumir que k puede ser positivo o negativo, por lo que necesitamos solo una de estas soluciones. Luego,

$$\boxed{T_k(t) = T_0 e^{jkct}} \quad (1.3)$$

Dependencia en z . Bajo el reemplazo anterior se tendrá que:

$$-k^2 = \left(R'' + \frac{1}{\rho} R' \right) \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z}$$

Y bajo una idea similar a lo anterior, se tendrá que:

$$-\frac{Z''}{Z} - k^2 = \left(R'' + \frac{1}{\rho} R' \right) \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi}$$

donde como el lado derecho no depende de z , es una constante bajo esta variable que denominaremos $-a^2$. Así, se tiene que:

$$-\frac{Z''}{Z} - k^2 = -a^2 \longrightarrow Z'' + (k^2 - a^2) Z = 0$$

Nuevamente,

$$\boxed{Z_{k,a}^{\pm}(z) = Z_0 e^{\pm j\sqrt{k^2 - a^2} z}} \quad (1.4)$$

Consideremos por simplicidad el caso en que k^2 y a^2 son ambos reales y positivos (aunque esto no tiene por qué ser así. Esta solución oscila si $k^2 > a^2$, decaen exponencialmente si $k^2 < a^2$ y son constantes si $k^2 = a^2$).

Dependencia en θ . Se tiene ahora que:

$$\left(R'' + \frac{1}{\rho} R' \right) \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = -a^2$$

Podemos reordenar esta ecuación como sigue para despejar Φ :

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \left(R'' + \frac{1}{\rho} R' \right) \frac{\rho^2}{R} + \rho^2 a^2$$

Dado que no hay dependencia entre las variables de cada lado de la ecuación, ambos lados deben ser constantes e igual a un número que llamaremos n^2 . Entonces,

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = n^2 \longrightarrow \Phi'' + n^2 \Phi = 0$$

Despejando,

$$\boxed{\Phi_n^{\pm}(\theta) = \Phi_0 e^{\pm jn\theta}} \quad (1.5)$$

Como la solución debe tener simetría cilíndrica, entonces la solución debe ser igual en $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$. De esta forma,

$$e^0 = e^{jn2\pi} \longrightarrow \boxed{n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

Dependencia de ρ . Finalmente, tenemos que:

$$\left(R'' + \frac{1}{\rho} R' \right) \frac{\rho^2}{R} + \rho^2 a^2 = n^2$$

Multiplicando por R y reordenando términos obtenemos que:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (a^2 \rho^2 - n^2) R = 0 \quad (1.6)$$

Esta ecuación diferencial, muy diferente a las anteriores, es muy similar la ecuación diferencial de Bessel, la motivación de este trabajo y que procederemos a resolver a continuación.

Antes de proceder con el próximo apartado, llevemos la ecuación a su forma estándar haciendo la sustitución $x = a\rho$, de modo que:

$$R = R(x) \longrightarrow \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{dx} \frac{dx}{d\rho} = a \frac{dR}{dx} \longrightarrow \frac{d^2 R}{d\rho^2} = a^2 \frac{d^2 R}{dx^2}$$

Entonces la ecuación diferencial anterior puede escribirse como:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 a^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{x}{a} a \frac{dR}{dx} + (x^2 - n^2) R(x) = 0$$

Simplificando términos obtenemos:

$$\boxed{x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} (x) + x \frac{dR}{dx} (x) + (x^2 - n^2) R(x) = 0} \quad (1.7)$$

Esta es efectivamente la **ecuación de Bessel**, cuyas dos soluciones linealmente independientes son las **funciones de Bessel** $J_n(x)$ y las **funciones de Neumann** $Y_n(x)$. Nótese que estas dependen del valor que n tome, razón por la cual nos referimos a n como el **orden** de las funciones de Bessel.

1.2. Resolución mediante series de potencias

1.2.1. Primera solución: Funciones de Bessel

Dado que la ecuación anterior es una ecuación diferencial de segundo orden, tendremos dos soluciones linealmente independientes. Primero construiremos una solución inicial utilizando series de potencias y aplicando el Teorema de Frobenius. Luego, la solución debe escribirse como:

$$R(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

Entonces, tenemos que:

$$xR'(x) = nx^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + x^n \sum_{k=0}^{\infty} kb_k x^k$$

Asimismo,

$$x^2 R''(x) = n(n-1)x^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + 2nx^n \sum_{k=0}^{\infty} kb_k x^k + x^n \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^k$$

Asimismo, se tiene que:

$$x^2 R(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+2} = x^n \sum_{k=2}^{\infty} b_{k-2} x^k$$

Reemplazando esto en la ecuación diferencial se tiene que:

$$x^n \sum_{k=0}^{\infty} [n(n-1)b_k + 2nkb_k + k(k-1)b_k + nb_k + kb_k + b_{k-2} - n^2b_k] x^k = 0$$

$$x^n \sum_{k=0}^{\infty} (2nkb_k + k^2b_k + b_{k-2}) x^k = 0$$

Entonces, b_k debe ser tal que:

$$k(k+2n)b_k + b_{k-2} = 0$$

Como la serie de potencias comienza en $k=0$, entonces $b_{-1} = 0$ y por lo tanto:

$$b_1 = -\frac{b_{-1}}{k(k+2n)} = 0 \longrightarrow b_{2k-1} = \frac{b_{2k-3}}{(2k-1)(2k-1+2n)} = 0$$

Para los números pares se sigue que:

$$b_{2k} = -\frac{b_{2k-2}}{4k(n+k)}$$

Siguiendo inductivamente se puede probar que:

$$b_{2k} = (-1)^k \frac{b_0}{4^k k! (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1)} \quad (1.8)$$

¿Cómo escogemos b_0 ? En este caso, para garantizar la convergencia de la serie mediante el criterio del cociente, hacemos $b_0 = 1/2^n n!$, por lo que reemplazando en la expresión inicial:

$$R(x) = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Dado que deseamos considerar también los órdenes complejos, extendemos la definición de factoriales mediante la función Gamma, obteniendo así que:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (1.9)$$

Observe que la evaluación puede hacerse incluso para n negativos. Se tiene que:

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Es decir,

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (1.10)$$

Algunas de sus gráficas son:

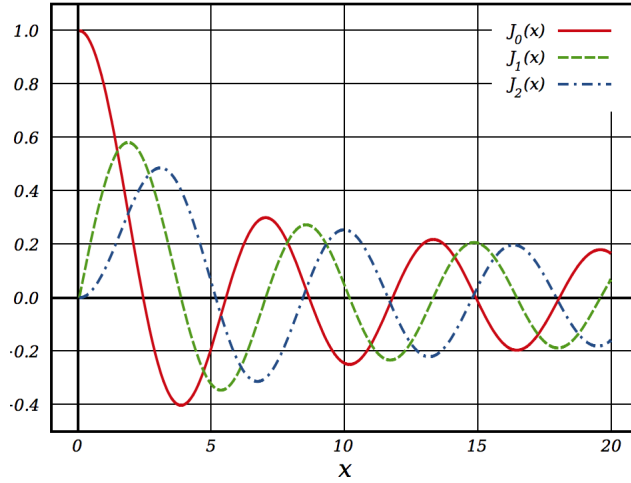


Figura 1.1: Funciones de Bessel para $n = 0, 1, 2$. *Fuente:* Wikipedia.

1.2.2. Segunda solución: Funciones de Neumann

Ahora deseamos determinar una solución linealmente independiente. Primero, describimos cómo se comportan las funciones de Bessel cerca del origen. De la expansión de series de potencias:

- Si $\nu > 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Si $\nu = 0$, se tiene que en $k = 0$, la expansión de la serie de potencias se hace exactamente 1, de modo que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1$$

- Si $\nu < 0$, se tiene que para $k = 0$ el primer término de la serie de potencias se comporta de manera asintótica, de modo que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_\nu(x) = \pm\infty$$

Esto significa que J_ν y $J_{-\nu}$ son dos soluciones linealmente independientes si $\nu \notin \mathbb{Z}$. Si $\nu \in \mathbb{Z}$, son linealmente dependientes. Como $(-1)^n = \cos n\pi$, la función $J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)$ es una solución de la ecuación de Bessel que se anula si $\nu \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto, normalizando definimos:

$$Y_\nu(x) \triangleq \begin{cases} \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, & \text{si } \nu \notin \mathbb{Z}, \\ \lim_{\rho \rightarrow \nu} \frac{\cos(\rho\pi) J_\rho(x) - J_{-\rho}(x)}{\sin(\rho\pi)}, & \text{si } \nu \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Se tiene que J_ν e Y_ν son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel para todo $\nu \in \mathbb{R}$ (y de hecho para todo $\nu \in \mathbb{C}$). Esto puede ser demostrado calculando el determinante Wronskiano y es un ejercicio puramente algebraico que se deja propuesto al lector.

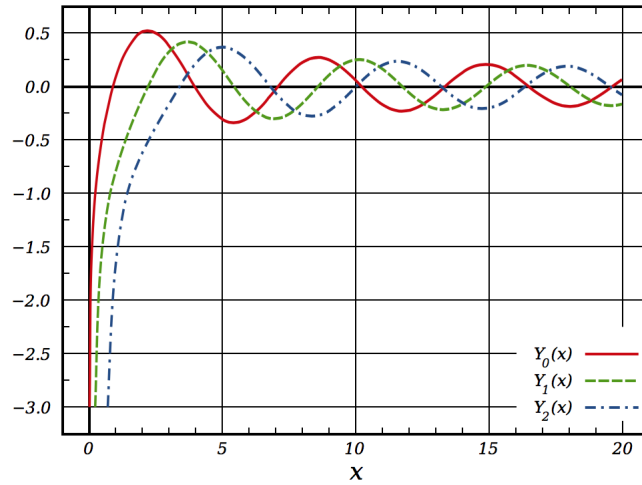


Figura 1.2: Funciones de Bessel de segunda especie.

2. Propiedades de las funciones de Bessel

2.1. Función generatriz

Muchas propiedades sobre las funciones de Bessel pueden ser demostrados mediante su función generatriz. Una función generatriz, definida de forma informal, es básicamente una función cuya representación en serie de potencias contiene en cada a_n un término de una sucesión dada, en este caso la sucesión de funciones de Bessel.

Teorema 2.1: Se tiene que:

$$\exp \left[\frac{x}{2} (z - z^{-1}) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n \quad (2.1)$$

por lo que esta función es la función generatriz de J_n .

Demostración: Tenemos que:

$$\exp \left[\frac{x}{2} (z - z^{-1}) \right] = \exp \left(\frac{x}{2} z \right) \exp \left(-\frac{x}{2} \frac{1}{z} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^m}{m!} z^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2} \right)^k}{k!} z^{-k}$$

Si realizamos esta multiplicación término a término:

$$\exp \left[\frac{x}{2} (z - z^{-1}) \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2} \right)^{m+k}}{m! k!} z^{m-k}$$

Deseamos comenzar la sumatoria en $-\infty$. Para ello, hagamos $n = m - k$ con $m, k \geq 0$. De esta

forma, podemos cambiar la primera sumatoria, obteniendo así que:

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{x}{2} (z - z^{-1}) \right] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\substack{m-k=n \\ m, k \geq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+k}}{m! k!} \right] z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(n+k)! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \right]}_{J_n(x)} z^n \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\exp \left[\frac{x}{2} (z - z^{-1}) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n \quad \blacksquare$$

Proposición 2.1: Se tiene que:

$$\cos(x) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \quad (2.2)$$

$$\sin(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x) \quad (2.3)$$

$$1 = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \quad (2.4)$$

Demostración:

Hagamos $z = e^{j\phi} \rightarrow j \sin \phi = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right)$ y reemplazando en la función generatriz:

$$e^{jx \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{jn\phi}$$

Es decir, expandiendo mediante la fórmula de De Moivre:

$$\cos(x \sin \phi) + j \sin(x \sin \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) [\cos(n\phi) + j \sin(n\phi)]$$

Separando partes real e imaginaria:

$$\cos(x \sin \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \cos(n\phi) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\phi)$$

$$\sin(x \sin \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \sin(n\phi) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \sin[(2n+1)\phi]$$

Esto entrega los resultados deseados haciendo $\phi = \frac{\pi}{2}$ para las dos primeras ecuaciones y $\phi = 0$ para la tercera. \blacksquare

Proposición 2.2: Se cumple que:

$$J_n(-x) = J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (2.5)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

Consideremos la función generatriz:

$$\exp\left[\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right]$$

Si hacemos $x \rightarrow -x$ y $z \rightarrow z^{-1}$ observamos que:

$$\exp\left[\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right] = \exp\left[-\frac{x}{2}(z^{-1} - z)\right]$$

¡Que son exactamente la misma función! expandiendo en series de potencias:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-x) z^{-n}$$

En el primer miembro hacemos $m = -n$, obteniendo así que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{-m}(x) z^{-m}$$

Es decir,

$$(-1)^n J_n(x) = J_{-n}(x) = J_n(-x)$$

Luego, la función de Bessel es par para órdenes pares e impar para órdenes impares. ■

Proposición 2.3: Para todo $n \in \mathbb{Z}$:

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} x^n J_n(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

Demostración:

Tomemos la función generatriz:

$$\exp\left[\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n$$

- Derivamos a ambos lados en función de x :

$$\frac{1}{2}(z - z^{-1}) \exp \left[\frac{x}{2}(z - z^{-1}) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) z^n$$

El lado izquierdo puede expandirse en sus series de potencias:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}z \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n - \frac{1}{2}z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) z^n \\ \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] z^n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x) z^n \end{aligned}$$

De aquí, igualando coeficientes:

$$\boxed{2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)} \quad (2.6)$$

- Derivando la función generatriz con respecto a z :

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2z^2} \right) \exp \left[\frac{x}{2}(z - z^{-1}) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x) z^{n-1}$$

Expandiendo el lado derecho:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2z^2} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x) z^{n-1} \\ \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^{n-2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{x} J_n(x) z^{n-1} \\ \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-1}(x) z^{n-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x) z^{n-1} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2n}{x} J_n(x) z^{n-1} \end{aligned}$$

Igualando coeficientes concluimos que:

$$\boxed{\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x)} \quad (2.7)$$

- Sumamos ambas ecuaciones:

$$2J'_n(x) + \frac{2n}{x} J_n(x) = 2J_{n-1}(x)$$

Multiplicamos por $x^n/2$:

$$x^n J'_n(x) + nx^{n-1} J_n(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

Finalmente, por regla del producto de la derivación:

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^n J_n(x) = x^n J_{n-1}(x)} \quad (2.8)$$

Demostradas las tres identidades, queda entonces demostrado. ■

Proposición 2.4: Para todo $m \neq 0$ se tiene que:

$$J_0^2(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+m}(x) J_n(x) = 0 \quad (2.9)$$

Demostración:

$$\exp\left[\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n$$

Se tiene entonces que:

$$\exp\left[-\frac{x}{2}(z - z^{-1})\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^{-n}$$

Multiplicando ambas:

$$\begin{aligned} 1 &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) z^{-m} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+m}(x) J_n(x) \right) z^m \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+m}(x) J_n(x) \right] z^m \end{aligned}$$

Comparando coeficientes es sigue que:

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = J_0^2(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) \leftarrow \text{usando } J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

y

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+m}(x) J_n(x)$$

Esta última relación indica que las funciones de Bessel son ortogonales entre ellas bajo el producto interno $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$. ■

Proposición 2.5:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) = 1 \quad (2.10)$$

Demostración:

Basta hacer $z = 1$ en la ecuación generatriz. ■

Proposición 2.6: Se tiene que:

$$J_n(x+y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k(x) J_{n-k}(y) \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) &= \exp\left[\frac{1}{2}(x+y)(t-t^{-1})\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{2}x(t-t^{-1})\right] \exp\left[\frac{1}{2}y(t-t^{-1})\right] \\
&= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)z^k\right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(y)z^m\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)J_{n-k}(y)\right] z^n
\end{aligned}$$

Comparando coeficientes se llega a lo pedido. ■

2.2. Valores especiales

En esta sección revisaremos los valores de las funciones de Bessel cuando toman algunos valores especiales.

Proposición 2.7: Si $\nu \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, las funciones de Bessel son funciones elementales:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = Y_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x) \quad (2.11)$$

$$-J_{-\frac{1}{2}}(x) = Y_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x) \quad (2.12)$$

Demostración:

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&= \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \frac{(2k+1)! \sqrt{\pi}}{k! 2^{2k+1}}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x
\end{aligned}$$

Asimismo,

$$Y_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) J_{-\frac{1}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = J_{\frac{1}{2}}(x)$$

Recordando que:

$$\frac{d}{dx} x^n J_n(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

Entonces,

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x} J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

Es decir,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

Finalmente,

$$Y_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -J_{\frac{1}{2}}(x)$$

Con esto se demuestran todas las relaciones. ■

2.3. Representación integral

Dado que no estamos presuponiendo un dominio de análisis complejo, revisaremos la versión del teorema de representación integral exclusivamente para números enteros.

Teorema 2.2: Sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \quad (2.13)$$

Demostración:

Notamos que esta expresión corresponde en cierto sentido al coeficiente de una serie de Fourier, ya que estamos tomando el valor medio de una función que aparenta ser periódica. De esta forma, como la función generatriz es una serie de $-\infty$ a ∞ , es una buena idea evaluar t en la exponencial compleja para evaluar la situación:

$$\begin{aligned} \psi(x, e^{i\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} = \exp \left[\frac{x}{2} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \cdot \frac{i}{i} \right] \\ &\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} = \exp(x i \sin \theta) \end{aligned}$$

en particular,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} = \cos(x \sin \theta) + i \sin(x \sin \theta) = g(\theta)$$

Notamos que cada uno de los coeficientes de esta serie de Fourier en su forma compleja corresponden a $J_n(x)$. De lo que ya sabemos:

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-im\theta} d\theta$$

con lo cual,

$$\begin{aligned}
 J_m(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta) e^{-im\theta} + i \sin(x \sin \theta) e^{-im\theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta) \cos(m\theta) + i \cos(x \sin \theta) \sin(m\theta) d\theta \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i \sin(x \sin \theta) \cos(m\theta) + \sin(x \sin \theta) \sin(m\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

observando que $i \cos(x \sin \theta) \sin(m\theta)$ y $i \sin(x \sin \theta) \cos(m\theta)$ son impares, entonces

$$\begin{aligned}
 J_m(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin \theta) \cos(m\theta) d\theta + \sin(x \sin \theta) \sin(m\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\theta - x \sin \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

que era exactamente lo buscado. ■

Corolario: Se tiene que $|J_n(x)| \leq 1$.

Demostración:

Tomamos la representación integral:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta$$

Notamos que:

$$|J_n(x)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos(n\theta - x \sin \theta)| d\theta$$

pero $|\cos(n\theta - x \sin \theta)| \leq 1$, entonces

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos(n\theta - x \sin \theta)| d\theta \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta = 1$$

De esta forma, por transitividad concluimos que

$$|J_n(x)| \leq 1 \quad \blacksquare$$

3. Transformadas integrales

3.1. Transformada de Laplace

Teorema 3.1: Se tiene que la transformada de Laplace de J_0 es:

$$\mathcal{L}\{J_0\}(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \tag{3.1}$$

Demostración:

La ecuación de Bessel asociada es $x(y'' + y) + y' = 0$. Entonces, aplicando la propiedad de dualidad:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y'' + y\} + \mathcal{L}\{y'\} \\ &= -(1 + s^2) Y'(s) - sY(s) \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial obtenemos que:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{J_0(s)\} = \frac{c}{\sqrt{1 + s^2}}$$

La constante c puede determinarse como:

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{J_0'(x)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} [x\mathcal{L}\{J_0\}(x) - J_0(0)] = c - 1$$

Es decir, finalmente,

$$\boxed{\mathcal{L}\{J_0(s)\} = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}}} \quad \blacksquare$$

4. Aplicaciones

4.1. Modulación FM

Para transmitir información en diversos canales, entre ellos el aire, es común modular un mensaje $m(t)$ a través del ángulo de una función sinusoidal:

$$s(t) = A_c \cos \theta(t) \quad (4.1)$$

En la modulación de fase el mensaje queda representado en $\theta(t)$ como:

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + k_\varphi m(t) \quad (4.2)$$

Sin embargo, esta modulación es puramente teórica y no se usa. Lo común es utilizar la modulación en frecuencia (FM). Se define la frecuencia instantánea como:

$$f(t) \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{2\pi \Delta t} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{dt} \quad (4.3)$$

Asimismo, se define la modulación FM como aquella en que la frecuencia instantánea varía linealmente con el mensaje. En otras palabras,

$$f(t) = f_c + k_a m(t) \longrightarrow \theta(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau$$

Entonces, la ecuación de la modulación FM es:

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

Para analizar esta modulación en laboratorios, es común estudiar el caso más sencillo, en que $m(\tau)$ es un tono puro:

$$m(\tau) = A_m \cos(2\pi f_m \tau)$$

Es decir,

$$s_m(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + \frac{k_f A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \right] \quad (4.4)$$

Definiendo $\beta \triangleq \frac{k_f A_m}{f_m}$ entonces,

$$s_m(t) = \frac{A_c}{2} e^{j2\pi f_c t} e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} + \frac{A_c}{2} e^{-j2\pi f_c t} e^{-j\beta \sin(2\pi f_m t)} \quad (4.5)$$

Deseamos calcular el espectro de frecuencias global de esta señal (la transformada de Fourier). Notando que $e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)}$ es una función periódica de período $1/f_m$, entonces:

$$e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_m t}$$

Luego,

$$C_k = f_m \int_{-1/2f_m}^{1/2f_m} e^{j[\beta \sin(2\pi f_m t) - 2\pi k f_m t]} dt$$

Haciendo $x = 2\pi f_m t$ se tiene que:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \sin(x) - kx]} dx$$

Trabajando un poco esta expresión:

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[\beta \sin x - kx] dx + \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin[\beta \sin x - kx] dx$$

Notando que $\cos[\beta \sin x - kx]$ es una función par y $\sin[\beta \sin x - kx]$ una función impar, entonces:

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[\beta \sin x - kx] dx$$

Como k es un entero, entonces:

$$C_k = J_k(\beta)$$

En otras palabras,

$$e^{j\beta \sin(2\pi f_m t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{j2\pi k f_m t} \quad (4.6)$$

Y por lo tanto,

$$e^{-j\beta \sin(2\pi f_m t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{-j2\pi k f_m t}$$

Reemplazando en (4.5):

$$s_m(t) = \frac{A_c}{2} e^{j2\pi f_c t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{j2\pi k f_m t} + \frac{A_c}{2} e^{-j2\pi f_c t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{-j2\pi k f_m t}$$

Entonces,

$$s_m(t) = A_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos[2\pi(f_c + k f_m)t] \quad (4.7)$$

Tomando la Transformada de Fourier:

$$S_m(u) = \frac{A_c}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \{ \delta[u - (f_c + k f_m)] + \delta[u + (f_c + k f_m)] \} \quad (4.8)$$

Es decir, el espectro de la señal consiste en un conjunto de impulsos distanciados entre ellos de forma linealmente creciente y en que la magnitud de cada uno de ellos es $J_k(\beta)$.

Aplicando el teorema de la energía, la energía vendrá dada por:

$$\mathcal{E}_{s_m} = 2 \frac{A_c^2}{4} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta)}_{=1} = \frac{A_c^2}{2} \quad (4.9)$$

Es decir, la potencia es la misma indistintamente el valor de β .